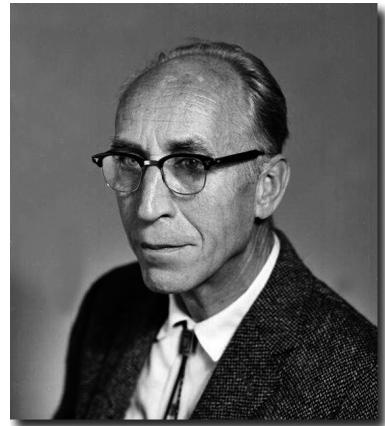


# Chapitre 11

## Thermodynamique des milieux continus



Carl Henry Eckart, 1902-1973

**EPFL**

## 11.1 Equations de continuité

- 11.1.1 Introduction historique
- 11.1.2 Système global et système local
- 11.1.3 Lien entre système global et système local
- 11.1.4 Variation de la fonction d'état scalaire
- 11.1.5 Dérivée temporelle de la fonction d'état - math
- 11.1.6 Dérivée temporelle de la fonction d'état - physique
- 11.1.7 Equation de continuité - référentiel fixe
- 11.1.8 Equation de continuité - référentiel local du fluide
- 11.1.9 Equations de continuité - scalaire et vectorielle
- 11.1.10 Convention de sommation d'Einstein
- 11.1.11 Produits en coordonnées cartésiennes

## 11.2 Système thermodynamique : milieu continu

- 11.2.1 Champs d'état et fonctions de champs d'état
- 11.2.2 Densités de source
- 11.2.3 Densités de courant
- 11.2.4 Equations de continuité - champs d'état
- 11.2.5 Théorème du centre de masse
- 11.2.6 Equation de continuité de l'énergie
- 11.2.7 Dérivée temporelle de l'énergie
- 11.2.8 Equation de continuité de l'énergie interne

## 11.3 Equations d'évolution

- 11.3.1 Dérivée temporelle de la masse
- 11.3.2 Masse molaire
- 11.3.3 Conservation de la masse
- 11.3.4 Vitesse du centre de masse
- 11.3.5 Dérivée temporelle de la charge électrique
- 11.3.6 Charge électrique molaire
- 11.3.7 Conservation de la charge électrique
- 11.3.8 Bilan énergétique
- 11.3.9 Milieu continu sans cisaillement
- 11.3.10 Affinité chimique
- 11.3.11 Thermostatique et thermodynamique

## 11.4 Liens entre systèmes local et global

- 11.4.1 Conditions d'homogénéité
- 11.4.2 Bilan de volume
- 11.4.3 Relation d'Euler
- 11.4.4 Bilan d'énergie interne
- 11.4.5 Premier principe de la thermodynamique
- 11.4.6 Deuxième principe de la thermodynamique
- 11.4.7 Dissipation
- 11.4.8 Equation de continuité pour les substances chimiques

## 11.5 Applications

- 11.5.1 Accéléromètre à force d'Archimède
- 11.5.2 Invariance galiléenne
- 11.5.3 Tenseur des contraintes symétrique

## 11.1 Équations de continuité

- 11.1.1 Introduction historique
- 11.1.2 Système global et système local
- 11.1.3 Lien entre système global et système local
- 11.1.4 Variation de la fonction d'état scalaire
- 11.1.5 Dérivée temporelle de la fonction d'état - math
- 11.1.6 Dérivée temporelle de la fonction d'état - physique
- 11.1.7 Equation de continuité - référentiel fixe
- 11.1.8 Equation de continuité - référentiel local du fluide
- 11.1.9 Equations de continuité - scalaire et vectorielle
- 11.1.10 Convention de sommation d'Einstein
- 11.1.11 Produits en coordonnées cartésiennes

- **Thermodynamique avant Eckart et Stückelberg**

Avant 1940-1950 :

- ① **Thermostatique** : états d'équilibre
- ② **Quasi-thermostatique** : processus entre des états d'équilibre

- **Thermodynamique depuis Stückelberg**

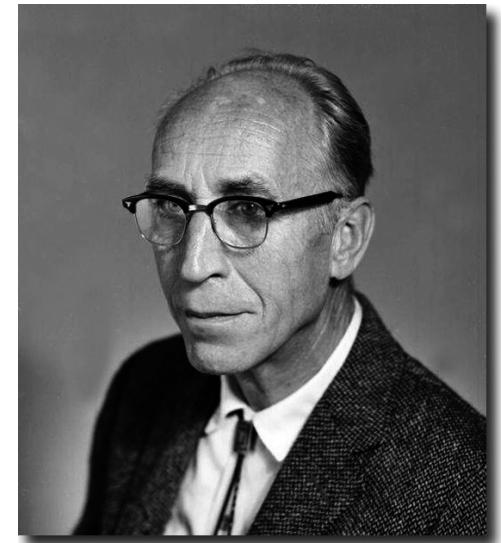
Après 1950 :

- ① **Thermodynamique** : évolution temporelle des états
- ② **Équations de continuité** : description en termes d'équations différentielles locales

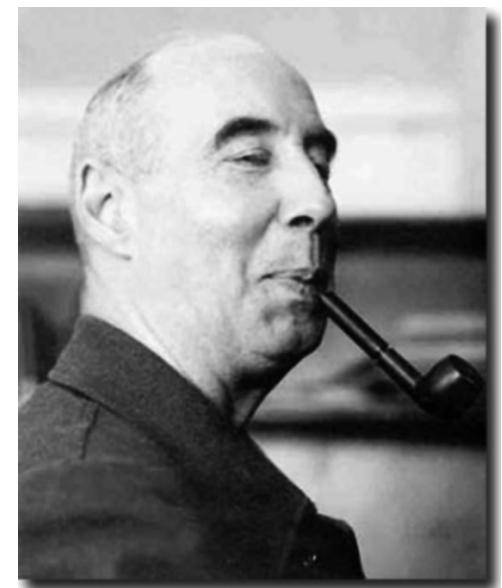
- **Feynman**  à propos de Stückelberg 

Cern 1965 :

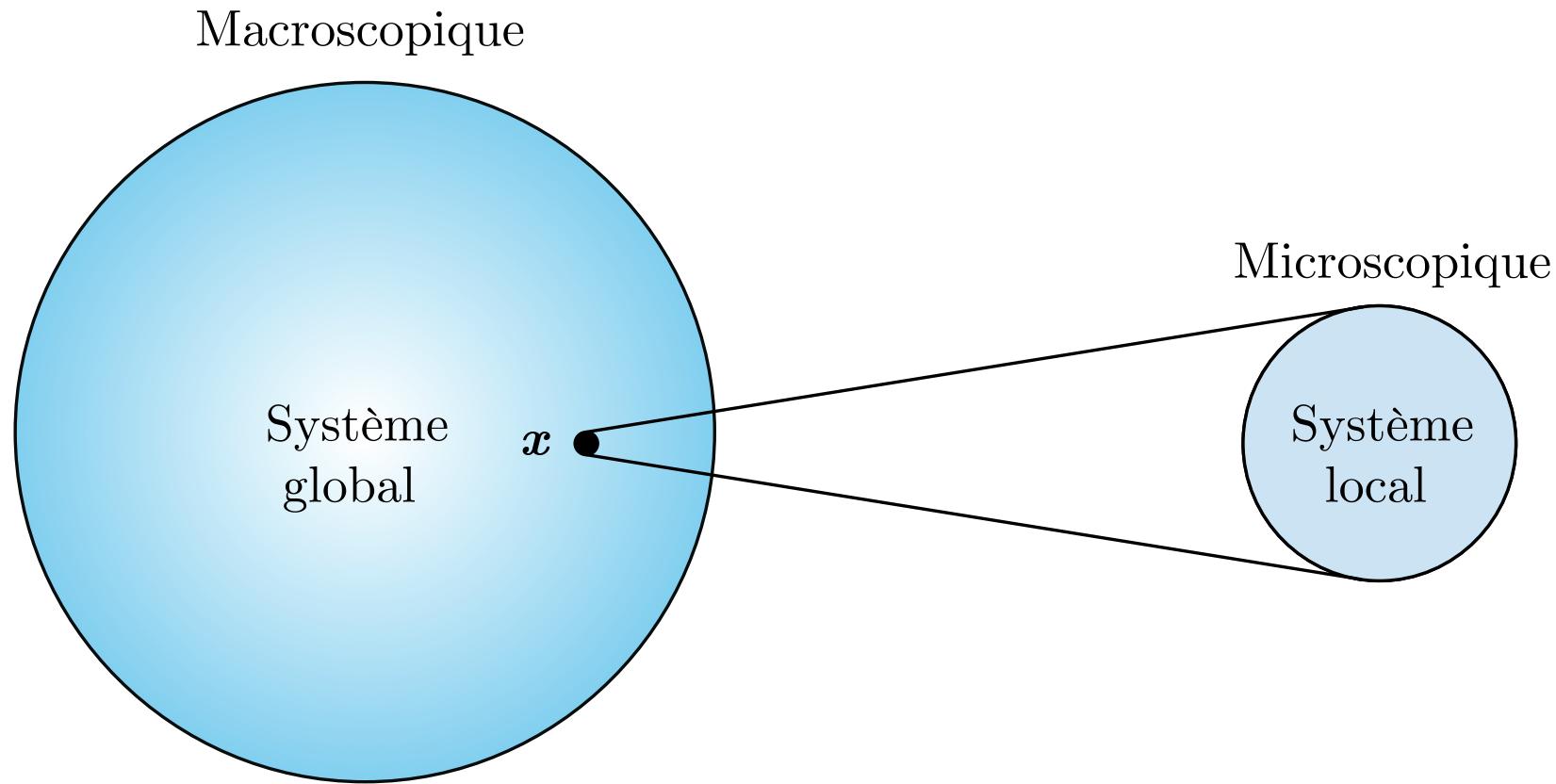
“He did the work and walks alone toward the sunset ; and, here I am, covered in all the glory, which rightfully should be his.”



Eckart



Stückelberg



- **Système global :**

- ① Milieu continu de points  $\{ x \}$
- ② Inéquilibre
- ③ Inhomogène
- ④ Non-uniforme

- **Système local :**

- ① Point  $x$
- ② Equilibre
- ③ Homogène
- ④ Uniforme

- **Système global :**

- ① **Variable d'état extensive dynamique** : quantité de mouvement  $\mathbf{P}(t)$
- ② **Variable d'état extensive thermique** : entropie  $S(t)$
- ③ **Autres variables d'état extensives** :  $X_1(t), \dots, X_n(t)$
- ④ **Etat** :  $\{ \mathbf{P}(t), S(t), X_1(t), \dots, X_n(t) \}$
- ⑤ **Fonction d'état** :

$$F(t) \equiv F(\mathbf{P}(t), S(t), X_1(t), \dots, X_n(t)) \quad (11.1)$$

- **Système local :**

- ① **Champ d'état densitaire dynamique** : densité de quant. de mvt  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$
- ② **Champ d'état densitaire thermique** : densité d'entropie  $s(\mathbf{x}, t)$
- ③ **Autres champs d'état densitaires** :  $x_1(\mathbf{x}, t), \dots, x_n(\mathbf{x}, t)$
- ④ **Etat** :  $\{ \mathbf{p}(\mathbf{x}, t), s(\mathbf{x}, t), x_1(\mathbf{x}, t), \dots, x_n(\mathbf{x}, t) \}$
- ⑤ **Densité de fonction d'état** :

$$f(\mathbf{x}, t) \equiv f(\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), s(\mathbf{x}, t), x_1(\mathbf{x}, t), \dots, x_n(\mathbf{x}, t)) \quad (11.5)$$

① **Variable d'état extensive dynamique** : quantité de mouvement (11.2)

$$P(t) = \int_{V(t)} d\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \int_{V(t)} dV(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{dV(\mathbf{x})} = \int_{V(t)} dV(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$$

② **Variable d'état extensive thermique** : entropie (11.3)

$$S(t) = \int_{V(t)} dS(\mathbf{x}, t) = \int_{V(t)} dV(\mathbf{x}) \frac{dS(\mathbf{x}, t)}{dV(\mathbf{x})} = \int_{V(t)} dV(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}, t)$$

③ **Autres variables d'état extensives** : (11.4) où  $i = 1, \dots, n$

$$X_i(t) = \int_{V(t)} dX_i(\mathbf{x}, t) = \int_{V(t)} dV(\mathbf{x}) \frac{dX_i(\mathbf{x}, t)}{dV(\mathbf{x})} = \int_{V(t)} dV(\mathbf{x}) x_i(\mathbf{x}, t)$$

④ **Fonctions d'état extensives scalaires** : (11.6)

$$F(t) = \int_{V(t)} dF(\mathbf{x}, t) = \int_{V(t)} dV(\mathbf{x}) \frac{dF(\mathbf{x}, t)}{dV(\mathbf{x})} = \int_{V(t)} dV(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}, t)$$

- Variation de la fonction d'état scalaire :

$$\delta F(t) = \int_{V(t)} dV(\mathbf{x}) \delta f(\mathbf{x}, t) + \oint_{S(t)} \delta dV(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) \quad (11.7)$$

- 1 Variation de volume infinitésimal :

$$\underbrace{\delta dV(\mathbf{x}, t)}_{\text{volume}} = \underbrace{d\mathbf{S}(\mathbf{x})}_{\text{surface}} \cdot \underbrace{\delta \mathbf{r}(\mathbf{x}, t)}_{\text{déplacement}} \quad (11.8)$$

- 2 Dérivée temporelle de la fonction d'état scalaire :

$$\dot{F}(t) \equiv \frac{dF(t)}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta F(t)}{\delta t}$$

- 3 Dérivée temporelle de la densité de fonction d'état scalaire :

$$\partial_t f(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta f(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \quad (11.9)$$

- 4 Champ de vitesse :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \mathbf{r}(\mathbf{x}, t)}{\delta t}$$

- Dérivée temporelle de la fonction d'état scalaire :

$$\dot{F}(t) = \int_{V(t)} dV(\mathbf{x}) \partial_t f(\mathbf{x}, t) + \oint_{S(t)} d\mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) \quad (11.10)$$

- **Dérivée temporelle de la fonction d'état scalaire :**

$$\dot{F}(t) = \underbrace{\int_{V(t)} dV(\mathbf{x})}_{\text{volume}} \partial_t f(\mathbf{x}, t) + \underbrace{\oint_{S(t)} d\mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t)}_{\text{surface}} \quad (11.10)$$

- **Théorème de la divergence :**

L'intégrale d'une fonction sur la surface  $S(t)$  est égale à l'intégrale de la divergence de cette fonction sur le volume  $V(t)$  :

$$\dot{F}(t) = \int_{V(t)} dV(\mathbf{x}) \left[ \partial_t f(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \right] \quad (11.11)$$

- **Divergence :** coordonnées cartésiennes

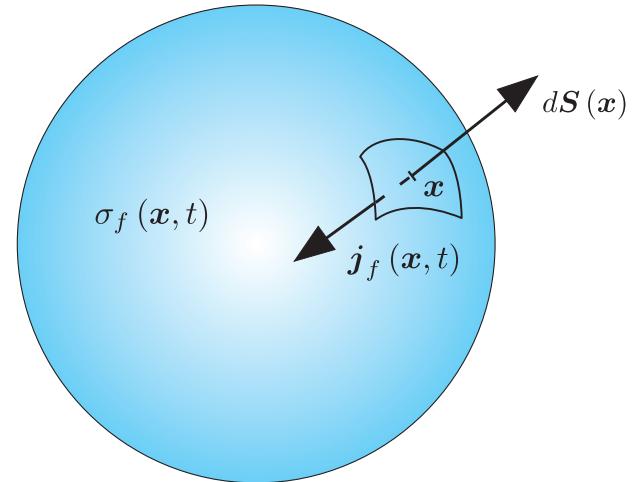
$$\begin{aligned} \nabla \cdot (f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) &= (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \begin{pmatrix} f(\mathbf{x}, t) v^1(\mathbf{x}, t) \\ f(\mathbf{x}, t) v^2(\mathbf{x}, t) \\ f(\mathbf{x}, t) v^3(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^3 \partial_i (f(\mathbf{x}, t) v^i(\mathbf{x}, t)) \end{aligned}$$

- Equation de bilan de la fonction d'état scalaire :

$$\dot{F}(t) = \Sigma_F(t) + I_F(t) \quad (1.12)$$

- Causes physiques de la variation temporelle de la fonction d'état scalaire :

- ① Densité de source  $\sigma_f(x, t)$  : production interne au volume  $V(t)$
- ② Densité de courant  $j_f(x, t)$  : flux à travers la surface  $S(t)$



- Dérivée temporelle de la fonction d'état scalaire :

$$\dot{F}(t) = \underbrace{\int_{V(t)} dV(x) \sigma_f(x, t)}_{\Sigma_F(t)} - \underbrace{\oint_{S(t)} dS(x) \cdot j_f(x, t)}_{I_F(t)} \quad (11.17)$$

- Théorème de la divergence :

L'intégrale d'une fonction sur la surface  $S(t)$  est égale à l'intégrale de la divergence de cette fonction sur le volume  $V(t)$  :

$$\dot{F}(t) = \int_{V(t)} dV(x) \left[ \sigma_f(x, t) - \nabla \cdot j_f(x, t) \right] \quad (11.18)$$

- Dérivée temporelle de la fonction d'état scalaire - mathématique :

$$\dot{F}(t) = \int_{V(t)} dV(\mathbf{x}) \left[ \partial_t f(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \right] \quad (11.11)$$

- Dérivée temporelle de la fonction d'état scalaire - physique :

$$\dot{F}(t) = \int_{V(t)} dV(\mathbf{x}) \left[ \sigma_f(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{j}_f(\mathbf{x}, t) \right] \quad (11.18)$$

- Les expressions mathématique et physique de la dérivée temporelle de la fonction d'état scalaire  $\dot{F}(t)$  doivent être égales en tout point  $\mathbf{x}$ . En identifiant les intégrants des équations (11.11) et (11.18), on obtient l'équation de continuité locale de la fonction d'état scalaire  $F(t)$  décrite par rapport à un référentiel fixe dans l'espace :

$$\partial_t f(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = \sigma_f(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{j}_f(\mathbf{x}, t) \quad (11.19)$$

- ①  $f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  : **densité de courant convectif**

mouvement du centre de masse local du fluide par rap. au référentiel fixe

- ②  $\mathbf{j}_f(\mathbf{x}, t)$  : **densité de courant conductif**

mouvement relatif du fluide par rapport au réf. du centre de masse local

- **Equation de continuité de la fonction d'état scalaire dans un référentiel fixe :**

$$\partial_t f(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = \sigma_f(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{j}_f(\mathbf{x}, t) \quad (11.19)$$

- **Divergence du courant de la densité de fonction d'état :**

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \begin{pmatrix} j_f^1 \\ j_f^2 \\ j_f^3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \partial_i j_f^i \quad (11.20)$$

- **Dérivée temporelle de la densité de fonction d'état dans le référentiel local du fluide :**

$$\dot{f}(\mathbf{x}, t) = \partial_t f(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) f(\mathbf{x}, t) \quad (11.21)$$

- **Terme convectif :**

$$\mathbf{v} \cdot \nabla = (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} \partial^1 \\ \partial^2 \\ \partial^3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 v_i \partial^i \quad (11.22)$$

- **Equation de continuité de la fonction d'état scalaire dans un référentiel fixe :**

$$\partial_t f(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = \sigma_f(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \mathbf{j}_f(\mathbf{x}, t) \quad (11.19)$$

- **Dérivée temporelle de la densité de fonction d'état dans le référentiel local du fluide :**

$$\dot{f}(\mathbf{x}, t) = \partial_t f(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) f(\mathbf{x}, t) \quad (11.21)$$

- **Identité vectorielle :** (11.23)

$$\nabla \cdot (f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = f(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) f(\mathbf{x}, t)$$

- **Divergence de la vitesse :**

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \partial_i v^i \quad (11.26)$$

- **Equation de continuité de la fonction d'état scalaire dans le référentiel local du fluide :** (11.21) et (11.23) dans (11.19)

$$\dot{f}(\mathbf{x}, t) + (\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) f(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}_f(\mathbf{x}, t) = \sigma_f(\mathbf{x}, t) \quad (11.24)$$

- **Equation de continuité de la fonction d'état scalaire :**

$$\dot{f}(x, t) + (\nabla \cdot \mathbf{v}(x, t)) f(x, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}_f(x, t) = \sigma_f(x, t) \quad (11.24)$$

- **Généralisation de l'équation de continuité de la fonction d'état scalaire à la fonction d'état vectorielle :**

- ① **Fonction d'état** : scalaire  $\rightarrow$  vectorielle :  $F(t) \rightarrow \mathbf{F}(t)$
- ② **Densité de fonction d'état** : scalaire  $\rightarrow$  vectorielle :  $f(x, t) \rightarrow \mathbf{f}(x, t)$
- ③ **Densité de source** : scalaire  $\rightarrow$  vectorielle :  $\sigma_f(x, t) \rightarrow \boldsymbol{\sigma}_f(x, t)$
- ④ **Densité de courant** : vectorielle  $\rightarrow$  tensorielle :  $\mathbf{j}_f(x, t) \rightarrow \mathbf{j}_f(x, t)$
- ⑤ **Divergence** : scalaire  $\rightarrow$  vectorielle :  $\nabla \cdot \mathbf{j}_f(x, t) \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j}_f(x, t)$

- **Equation de continuité de la fonction d'état vectorielle :**

$$\dot{f}(x, t) + (\nabla \cdot \mathbf{v}(x, t)) f(x, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}_f(x, t) = \boldsymbol{\sigma}_f(x, t) \quad (11.25)$$

- **Equation de continuité de la fonction d'état scalaire :**

$$\dot{f}(x, t) + (\nabla \cdot \mathbf{v}(x, t)) f(x, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}_f(x, t) = \sigma_f(x, t) \quad (11.24)$$

- **Divergence scalaire du courant de la densité de fonction d'état :**

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \begin{pmatrix} j_f^1 \\ j_f^2 \\ j_f^3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \partial_i j_f^i \quad (11.20)$$

- **Equation de continuité de la fonction d'état vectorielle :**

$$\dot{\mathbf{f}}(x, t) + (\nabla \cdot \mathbf{v}(x, t)) \mathbf{f}(x, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}_f(x, t) = \boldsymbol{\sigma}_f(x, t) \quad (11.25)$$

- **Divergence vectorielle du courant de la densité de fonction d'état :**

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{j}_f &= (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \begin{pmatrix} j_f^1_1 & j_f^1_2 & j_f^1_3 \\ j_f^2_1 & j_f^2_2 & j_f^2_3 \\ j_f^3_1 & j_f^3_2 & j_f^3_3 \end{pmatrix} \\ &= \left( \sum_{i=1}^3 \partial_i j_f^i_1, \sum_{i=1}^3 \partial_i j_f^i_2, \sum_{i=1}^3 \partial_i j_f^i_3 \right) \end{aligned} \quad (11.27)$$

- **Convention de sommation d'Einstein** : suppression du signe  $\sum$

On somme les indices et exposants identiques :

- ① Indice de colonne
- ② Exposant de ligne

- **Grandeurs géométriques** : en dimensions 1 (vecteur) et 2 (tenseur)

- ① Vecteur colonne  $x$  : représenté dans une base de  $\mathbb{R}^3$  par une colonne

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

- ② Vecteur ligne  $x$  : représenté dans une base de  $\mathbb{R}^3$  par une ligne

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

- ③ Tenseur  $x$  : représenté dans une base de  $\mathbb{R}^3$  par un tableau (matrice)

$$x = \begin{pmatrix} x^1_1 & x^1_2 & x^1_3 \\ x^2_1 & x^2_2 & x^2_3 \\ x^3_1 & x^3_2 & x^3_3 \end{pmatrix}$$

- ① Produit scalaire d'un vecteur ligne  $\mathbf{x}$  avec un vecteur colonne  $\mathbf{y}$  :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = x_1 y^1 + x_2 y^2 + x_3 y^3 \equiv x_i y^i \quad (11.12)$$

- Vecteur ligne gradient  $\nabla$  :

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \equiv (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$$

- Divergence de la vitesse  $\mathbf{v}$  :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \partial_1 v^1 + \partial_2 v^2 + \partial_3 v^3 \equiv \partial_i v^i$$

- Divergence de la densité de courant vectoriel  $\mathbf{j}_f$  :

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_f = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \begin{pmatrix} j_f^1 \\ j_f^2 \\ j_f^3 \end{pmatrix} = \partial_1 j_f^1 + \partial_2 j_f^2 + \partial_3 j_f^3 \equiv \partial_i j_f^i$$

- ② Produit scalaire d'un tenseur  $x$  avec un vecteur colonne  $y$  :

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} x^1_1 & x^1_2 & x^1_3 \\ x^2_1 & x^2_2 & x^2_3 \\ x^3_1 & x^3_2 & x^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^1_i y^i \\ x^2_i y^i \\ x^3_i y^i \end{pmatrix} \quad (11.13)$$

- Produit scalaire du tenseur des contraintes  $\tau$  et de la vitesse  $v$  :

$$\tau \cdot v = \begin{pmatrix} \tau^1_1 & \tau^1_2 & \tau^1_3 \\ \tau^2_1 & \tau^2_2 & \tau^2_3 \\ \tau^3_1 & \tau^3_2 & \tau^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tau^1_i v^i \\ \tau^2_i v^i \\ \tau^3_i v^i \end{pmatrix}$$

- ③ Produit scalaire d'un vecteur ligne  $x$  avec un tenseur  $y$  :

$$x \cdot y = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} y^1_1 & y^1_2 & y^1_3 \\ y^2_1 & y^2_2 & y^2_3 \\ y^3_1 & y^3_2 & y^3_3 \end{pmatrix} \equiv (x_i y^i_1, x_i y^i_2, x_i y^i_3) \quad (11.14)$$

- Divergence de la densité de courant tensorielle  $j_f$

$$\nabla \cdot j_f = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \begin{pmatrix} j_f^1_1 & j_f^1_2 & j_f^1_3 \\ j_f^2_1 & j_f^2_2 & j_f^2_3 \\ j_f^3_1 & j_f^3_2 & j_f^3_3 \end{pmatrix} \equiv (\partial_i j_f^i_1, \partial_i j_f^i_2, \partial_i j_f^i_3)$$

④ Trace du produit scalaire d'un tenseur  $x$  avec un tenseur  $y$  :

$$\begin{aligned}
 x:y &= \text{tr} \left( \begin{pmatrix} x^1_1 & x^1_2 & x^1_3 \\ x^2_1 & x^2_2 & x^2_3 \\ x^3_1 & x^3_2 & x^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1_1 & y^1_2 & y^1_3 \\ y^2_1 & y^2_2 & y^2_3 \\ y^3_1 & y^3_2 & y^3_3 \end{pmatrix} \right) \\
 &\equiv \text{tr} \begin{pmatrix} x^1_j y^j_1 & x^1_j y^j_2 & x^1_j y^j_3 \\ x^2_j y^j_1 & x^2_j y^j_2 & x^2_j y^j_3 \\ x^3_j y^j_1 & x^3_j y^j_2 & x^3_j y^j_3 \end{pmatrix} \equiv x^i_j y^j_i
 \end{aligned} \tag{11.15}$$

⑤ Produit tensoriel d'un vecteur colonne  $x$  avec un vecteur ligne  $y$  :

$$x \otimes y \equiv x y = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} (y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} x^1 y_1 & x^1 y_2 & x^1 y_3 \\ x^2 y_1 & x^2 y_2 & x^2 y_3 \\ x^3 y_1 & x^3 y_2 & x^3 y_3 \end{pmatrix}$$

- Tenseur gradient de vitesse  $\nabla v$  :

$$\nabla \otimes v \equiv \nabla v = \begin{pmatrix} \partial^1 \\ \partial^2 \\ \partial^3 \end{pmatrix} (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} \partial^1 v_1 & \partial^1 v_2 & \partial^1 v_3 \\ \partial^2 v_1 & \partial^2 v_2 & \partial^2 v_3 \\ \partial^3 v_1 & \partial^3 v_2 & \partial^3 v_3 \end{pmatrix} \tag{11.16}$$

## 11.2 Système thermodynamique : milieu continu

- 11.2.1 Champs d'état et fonctions de champs d'état
- 11.2.2 Densités de source
- 11.2.3 Densités de courant
- 11.2.4 Equations de continuité - champs d'état
- 11.2.5 Théorème du centre de masse
- 11.2.6 Equation de continuité de l'énergie
- 11.2.7 Dérivée temporelle de l'énergie
- 11.2.8 Equation de continuité de l'énergie interne

- **Système thermodynamique** : milieu continu constitué de  $r$  substances chimiques électriquement chargées en mouvement.
- **Champs d'état** :
  - ①  $p(x, t)$  : densité de quantité de mouvement
  - ②  $s(x, t)$  : densité d'entropie
  - ③  $\{n_A(x, t)\}$  : densités de substances chimiques où  $A = 1, \dots, r$
  - ④  $q(x, t)$  : densité de charge électrique
- **Etat** :  $\{p(x, t), s(x, t), \{n_A(x, t)\}, q(x, t)\} \equiv \{p, s, \{n_A\}, q\}$
- **Fonctions de champs d'état** :
  - ①  $v(p, s, \{n_A\}, q)$  : vitesse
  - ②  $e(p, s, \{n_A\}, q)$  : densité d'énergie
  - ③  $m(s, \{n_A\}, q)$  : densité de masse
  - ④  $u(s, \{n_A\}, q)$  : densité d'énergie interne

- ① **Quantité de mouvement** : premier principe (translation)

$$\sigma_p = \sum f^{\text{ext}} \quad (11.35)$$

où  $f^{\text{ext}}$  est une densité de force extérieure.

- ② **Entropie** : deuxième principe (évolution)

$$\sigma_s \geq 0 \quad (11.28)$$

- ③ **Quantité de substance  $A$**  : (réactions chimiques  $a = 1, \dots, n$ )

$$\sigma_A = \sum_{a=1}^n \omega_a \nu_{aA} \quad (11.30)$$

où  $\omega_a$  est la densité de vitesse de la réaction chimique  $a$  et  $\nu_{aA}$  est le coefficient stoechiométrique de la substance  $A$  dans la réaction chimique  $a$ .

- ④ **Charge électrique** : loi de conservation de la charge électrique

$$\sigma_q = 0 \quad (11.32)$$

① **Quantité de mouvement :**

$$\mathbf{j}_p = -\boldsymbol{\tau} \quad (11.36)$$

où  $\boldsymbol{\tau}$  est le tenseur des contraintes mécaniques, représenté par une matrice symétrique  $3 \times 3$  (démontré en application 11.5.2).

- **Divergence vectorielle du tenseur des contraintes :**

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_p = -\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$$

- **Vecteur ligne :** convention de sommation d'Einstein

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \begin{pmatrix} \tau^1_1 & \tau^1_2 & \tau^1_3 \\ \tau^2_1 & \tau^2_2 & \tau^2_3 \\ \tau^3_1 & \tau^3_2 & \tau^3_3 \end{pmatrix} = (\partial_i \tau^i_1, \partial_i \tau^i_2, \partial_i \tau^i_3) \quad (11.38)$$

② **Charge électrique :**

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_q + q \mathbf{v} \quad (11.34)$$

où la densité de courant électrique  $\mathbf{j}$  par rapport au référentiel fixe est la somme de la densité de courant électrique convectif  $q \mathbf{v}$  et de la densité de courant électrique conductif  $\mathbf{j}_q$ .

- 1 **Quantité de mouvement** :  $f \equiv p$  et  $j_p = -\tau$  et  $\sigma_p = \sum f^{\text{ext}}$

$$\dot{p} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) p - \nabla \cdot \tau = \sum f^{\text{ext}} \quad (11.37)$$

- 2 **Entropie** :  $f \equiv s$  et  $\sigma_s \geq 0$

$$\dot{s} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) s + \nabla \cdot \mathbf{j}_s = \sigma_s \geq 0 \quad (11.29)$$

- 3 **Quantité de substance chimique  $A$**  :  $f \equiv n_A$  et  $\sigma_A = \sum_{a=1}^n \omega_a \nu_{aA}$

$$\dot{n}_A + (\nabla \cdot \mathbf{v}) n_A + \nabla \cdot \mathbf{j}_A = \sum_{a=1}^n \omega_a \nu_{aA} \quad (11.31)$$

- 4 **Charge électrique** :  $f \equiv q$  et  $\sigma_q = 0$

$$\dot{q} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) q + \nabla \cdot \mathbf{j}_q = 0 \quad (11.33)$$

- **Equation de continuité de la quantité de mouvement :**

$$\dot{p} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (11.37)$$

- **Relation constitutive de la mécanique :**

$$\mathbf{p} = m(s, \{n_A\}, q) \mathbf{v} \quad (11.39)$$

- **Equation de continuité de la quantité de mvt :** (11.39) dans (11.37)

$$m\dot{\mathbf{v}} + \left( \dot{m} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) m \right) \mathbf{v} = \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (11.40)$$

qui doit être invariant du choix de référentiel d'inertie par invariance galiléenne. Ainsi, le terme entre parenthèses doit s'annuler, ce qui donne l'équation de continuité de la masse :

$$\dot{m} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) m = 0 \quad (11.41)$$

- **Théorème du centre de masse :** (11.41) dans (11.40)

$$m\dot{\mathbf{v}} = \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (11.42)$$

- **Densité de source d'énergie** : densité de puissance

$$\sigma_e = \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} \quad (11.43)$$

- **Equation de continuité de l'énergie** :  $f \equiv e$  et  $\sigma_e = \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}$

$$\dot{e} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) e + \nabla \cdot \mathbf{j}_e = \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} \quad (11.44)$$

- **Densité d'énergie** : cinétique et interne

$$e(\mathbf{p}, s, \{n_A\}, q) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m(s, \{n_A\}, q)} + u(s, \{n_A\}, q) \quad (11.45)$$

- **Dérivée temporelle de la densité d'énergie** :

$$\dot{e} = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial e}{\partial m} \dot{m} + \dot{u}$$

- **Dérivées partielles de la densité d'énergie interne** : avec  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$

$$\frac{\partial e}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m} = \mathbf{v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial e}{\partial m} = -\frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} = -\frac{\mathbf{v}^2}{2}$$

- **Dérivée temporelle de la densité d'énergie** :

$$\dot{e} = \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{p}} - \frac{1}{2} \dot{m} \mathbf{v}^2 + \dot{u} \quad (11.46)$$

- Dérivée temporelle de la densité d'énergie :

$$\dot{e} = \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{p}} - \frac{1}{2} \dot{m} \mathbf{v}^2 + \dot{u} \quad (11.46)$$

- Equation de continuité de la quantité de mouvement :

$$\dot{\mathbf{p}} = - (\nabla \cdot \mathbf{v}) m \mathbf{v} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (11.37)$$

- Equation de continuité de la masse :

$$\dot{m} = - (\nabla \cdot \mathbf{v}) m \quad (11.41)$$

- Dérivée temporelle : (11.37) et (11.41) dans (11.46)

$$\dot{e} = \mathbf{v} \cdot \left( - (\nabla \cdot \mathbf{v}) m \mathbf{v} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} \right) + \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \dot{u} \quad (11.47)$$

- Densité d'énergie cinétique :

$$e - u = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$$

- Dérivée temporelle de la densité d'énergie :

$$\dot{e} = \dot{u} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) (u - e) + (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} + \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} \quad (11.48)$$

- Dérivée temporelle de la densité d'énergie :

$$\dot{e} = \dot{u} + (\nabla \cdot \mathbf{v})(u - e) + (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} + \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} \quad (11.48)$$

- Equation de continuité de l'énergie :

$$\dot{e} = -(\nabla \cdot \mathbf{v})e - \nabla \cdot \mathbf{j}_e + \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} \quad (11.44)$$

- Identification : (11.44) et (11.48)

$$\dot{u} + (\nabla \cdot \mathbf{v})u + \nabla \cdot \mathbf{j}_e = -(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v}$$

- Identité vectorielle :

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (11.49)$$

- Equation de continuité de l'énergie interne :

$$\dot{u} + (\nabla \cdot \mathbf{v})u + \nabla \cdot (\mathbf{j}_e + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) = \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v})$$

- Identité vectorielle :

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (11.49)$$

① Premier terme : convention de sommation d'Einstein

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} &= (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \begin{pmatrix} \tau^1_1 & \tau^1_2 & \tau^1_3 \\ \tau^2_1 & \tau^2_2 & \tau^2_3 \\ \tau^3_1 & \tau^3_2 & \tau^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \\ &= (\partial_i \tau^i_1, \partial_i \tau^i_2, \partial_i \tau^i_3) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = (\partial_i \tau^i_j) v^j \end{aligned} \quad (11.50)$$

② Deuxième terme : convention de sommation d'Einstein

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) &= (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \begin{pmatrix} \tau^1_1 & \tau^1_2 & \tau^1_3 \\ \tau^2_1 & \tau^2_2 & \tau^2_3 \\ \tau^3_1 & \tau^3_2 & \tau^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \\ &= (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \begin{pmatrix} \tau^1_j v^j \\ \tau^2_j v^j \\ \tau^3_j v^j \end{pmatrix} = \partial_i (\tau^i_j v^j) \end{aligned} \quad (11.51)$$

- Identité vectorielle :

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (11.49)$$

- ③ Troisième terme : convention de sommation d'Einstein

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) &= \text{tr} \left( \begin{pmatrix} \tau^1_1 & \tau^1_2 & \tau^1_3 \\ \tau^2_1 & \tau^2_2 & \tau^2_3 \\ \tau^3_1 & \tau^3_2 & \tau^3_3 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} \partial^1 \\ \partial^2 \\ \partial^3 \end{pmatrix} (v_1, v_2, v_3) \right) \right) \\
 &= \text{tr} \left( \begin{pmatrix} \tau^1_1 & \tau^1_2 & \tau^1_3 \\ \tau^2_1 & \tau^2_2 & \tau^2_3 \\ \tau^3_1 & \tau^3_2 & \tau^3_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^1 v_1 & \partial^1 v_2 & \partial^1 v_3 \\ \partial^2 v_1 & \partial^2 v_2 & \partial^2 v_3 \\ \partial^3 v_1 & \partial^3 v_2 & \partial^3 v_3 \end{pmatrix} \right) \quad (11.52) \\
 &= \text{tr} \begin{pmatrix} \tau^1_j \partial^j v_1 & \tau^1_j \partial^j v_2 & \tau^1_j \partial^j v_3 \\ \tau^2_j \partial^j v_1 & \tau^2_j \partial^j v_2 & \tau^2_j \partial^j v_3 \\ \tau^3_j \partial^j v_1 & \tau^3_j \partial^j v_2 & \tau^3_j \partial^j v_3 \end{pmatrix} = \tau^i_j \partial^j v_i
 \end{aligned}$$

- Identité en composantes : convention de sommation d'Einstein

$$(\partial_i \tau^i_j) v^j = \partial_i (\tau^i_j v^j) - \tau^i_j \partial^j v_i \quad (11.53)$$

- **Equation de continuité de l'énergie interne :**

$$\dot{u} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) u + \nabla \cdot (\mathbf{j}_e + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) = \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v})$$

- **Equation de continuité de l'énergie interne :**

$$\dot{u} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) u + \nabla \cdot \mathbf{j}_u = \sigma_u \quad (11.54)$$

- **Densité de courant d'énergie interne :**

$$\mathbf{j}_u = \mathbf{j}_e + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} \quad (11.55)$$

- **Densité de source d'énergie interne :**

$$\sigma_u = \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) \quad (11.56)$$

## 11.3 Equations d'évolution

- 11.3.1 Dérivée temporelle de la masse
- 11.3.2 Masse molaire
- 11.3.3 Conservation de la masse
- 11.3.4 Vitesse du centre de masse
- 11.3.5 Dérivée temporelle de la charge électrique
- 11.3.6 Charge électrique molaire
- 11.3.7 Conservation de la charge électrique
- 11.3.8 Bilan énergétique
- 11.3.9 Milieu continu sans cisaillement
- 11.3.10 Affinité chimique
- 11.3.11 Thermostatique et thermodynamique

- **Dérivée temporelle de la masse** :  $m(s, \{n_A\}, q)$

$$\dot{m} = \frac{\partial m}{\partial s} \dot{s} + \sum_{A=1}^r \frac{\partial m}{\partial n_A} \dot{n}_A + \frac{\partial m}{\partial q} \dot{q} \quad (11.57)$$

- **masse indépendante de l'entropie et de la charge** :

$$\frac{\partial m}{\partial s} = 0 \quad (11.59) \quad \text{et} \quad \frac{\partial m}{\partial q} = 0 \quad (11.60)$$

- **Équation de continuité de la masse** :

$$\dot{m} = -(\nabla \cdot \mathbf{v}) m \quad (11.41)$$

- **Équation de continuité de la substance chimique  $A$**  :

$$\dot{n}_A = -(\nabla \cdot \mathbf{v}) n_A - \nabla \cdot \mathbf{j}_A + \sum_{a=1}^n \omega_a \nu_{aA} \quad (11.31)$$

- (11.59), (11.60), (11.41) et (11.31) dans (11.57) :  $(11.61)$

$$\left( m - \sum_{A=1}^r \frac{\partial m}{\partial n_A} n_A \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \sum_{A=1}^r \frac{\partial m}{\partial n_A} \left( \sum_{a=1}^n \omega_a \nu_{aA} - \nabla \cdot \mathbf{j}_A \right) = 0$$

- **Equation d'évolution de la masse : (11.61)**

$$\left( m - \sum_{A=1}^r \frac{\partial m}{\partial n_A} n_A \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \sum_{A=1}^r \frac{\partial m}{\partial n_A} \left( \sum_{a=1}^n \omega_a \nu_{aA} - \nabla \cdot \mathbf{j}_A \right) = 0$$

- L'équation (11.61) doit être satisfaite pour toute vitesse  $\mathbf{v}$  :

$$m - \sum_{A=1}^r \frac{\partial m}{\partial n_A} n_A = 0 \quad (11.62)$$

- La dérivée partielle de (11.62) par rap. à la densité de substance  $B$  :

$$\frac{\partial m}{\partial n_B} - \sum_{A=1}^r \left( \frac{\partial^2 m}{\partial n_A \partial n_B} n_A + \frac{\partial m}{\partial n_A} \delta_{AB} \right) = 0 \quad (11.63)$$

- Le 1<sup>er</sup> et le 3<sup>e</sup> terme de (11.52) s'annulent :

$$\frac{\partial^2 m}{\partial n_A \partial n_B} = 0 \quad \forall A = 1, \dots, r \quad \text{ainsi} \quad m_A \equiv \frac{\partial m}{\partial n_A} = \text{cste} \quad (11.65)$$

où  $m_A$  est la masse d'une mole de substance  $A$ , appelée masse molaire.

- **Densité de masse** : (11.65) dans (11.62)

$$m = \sum_{A=1}^r n_A m_A \quad (11.66)$$

- (11.65) et (11.66) dans (11.61) :

$$\sum_{A=1}^r m_A \left( \sum_{a=1}^n \omega_a \nu_{aA} - \nabla \cdot \mathbf{j}_A \right) = 0 \quad (11.67)$$

- **Masse molaire constante** :  $\nabla m_A = \mathbf{0}$  (11.68)

- (11.68) dans (11.67) :

$$\sum_{a=1}^n \omega_a \left( \sum_{A=1}^r m_A \nu_{aA} \right) - \nabla \cdot \left( \sum_{A=1}^r m_A \mathbf{j}_A \right) = 0 \quad (11.69)$$

- L'équation (11.69) doit être satisfaite pour tout  $\mathbf{j}_A$  :

$$\sum_{A=1}^r m_A \mathbf{j}_A = \mathbf{0} \quad (11.70)$$

- **Equation de bilan de courants :**

$$\sum_{A=1}^r m_A \mathbf{j}_A = \mathbf{0} \quad (11.70)$$

- **Equation dynamique :**

$$\sum_{a=1}^n \omega_a \left( \sum_{A=1}^r m_A \nu_{aA} \right) - \nabla \cdot \left( \sum_{A=1}^r m_A \mathbf{j}_A \right) = 0 \quad (11.69)$$

- En substituant (11.70) dans (11.69), on obtient la **loi de conservation de la masse de Lavoisier** :

$$\sum_{A=1}^r m_A \nu_{aA} = 0 \quad (11.60)$$

qui affirme que la réaction chimique  $a$  entre les substances chimiques  $A$  conserve la masse.

- La densité de courant de substance  $A$  est la somme des densités de courant convectif et conductif :

$$n_A \mathbf{v}_A = n_A \mathbf{v} + \mathbf{j}_A \quad (11.72)$$

- Densité de quantité de mouvement** : (11.66) dans (11.39) et (11.72)

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} = \left( \sum_{A=1}^r m_A n_A \right) \mathbf{v} = \sum_{A=1}^r m_A n_A \mathbf{v}_A - \sum_{A=1}^r m_A \mathbf{j}_A$$

- Densité de quantité de mouvement** : (11.70)

$$\mathbf{p} = \sum_{A=1}^r m_A n_A \mathbf{v}_A \quad (11.73)$$

- Vitesse du centre de masse de l'élément de fluide local** :

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\sum_{A=1}^r m_A n_A \mathbf{v}_A}{\sum_{A=1}^r m_A n_A} \quad (11.74)$$

- Dérivée temporelle de la charge électrique :  $q(\{n_A\})$

$$\dot{q} = \sum_{A=1}^r \frac{\partial q}{\partial n_A} \dot{n}_A \quad (11.75)$$

- Equation de continuité de la charge électrique :

$$\dot{q} = -(\nabla \cdot \mathbf{v}) q - \nabla \cdot \mathbf{j}_q \quad (11.33)$$

- Equation de continuité de la substance chimique  $A$  :

$$\dot{n}_A = -(\nabla \cdot \mathbf{v}) n_A - \nabla \cdot \mathbf{j}_A + \sum_{a=1}^n \omega_a \nu_{aA} \quad (11.31)$$

- (11.31) et (11.33) dans (11.75) :

$$\begin{aligned} & \left( q - \sum_{A=1}^r \frac{\partial q}{\partial n_A} n_A \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ & + \sum_{A=1}^r \frac{\partial q}{\partial n_A} \left( \sum_{a=1}^n \omega_a \nu_{aA} - \nabla \cdot \mathbf{j}_A \right) + \nabla \cdot \mathbf{j}_q = 0 \end{aligned} \quad (11.77)$$

- L'équation (11.77) doit être satisfaite pour toute vitesse  $v$  :

$$q - \sum_{A=1}^r \frac{\partial q}{\partial n_A} n_A = 0 \quad (11.78)$$

- La dérivée partielle de (11.78) par rap. à la densité de substance  $B$  :

$$\frac{\partial q}{\partial n_B} - \sum_{A=1}^r \left( \frac{\partial^2 q}{\partial n_A \partial n_B} n_A + \frac{\partial q}{\partial n_A} \delta_{AB} \right) = 0 \quad (11.79)$$

- Le 1<sup>er</sup> et le 3<sup>e</sup> terme de (11.79) s'annulent :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial n_A \partial n_B} = 0 \quad \forall A = 1, \dots, r \quad \text{ainsi} \quad q_A \equiv \frac{\partial q}{\partial n_A} = \text{cste} \quad (11.81)$$

où  $q_A$  est la charge électrique d'une mole de substance  $A$ , appelée charge électrique molaire.

- (11.81) dans (11.78) :

$$q = \sum_{A=1}^r n_A q_A \quad (11.82)$$

- **Densité de charge électrique :**

$$q = \sum_{A=1}^r n_A q_A \quad (11.82)$$

- **Types de substances électriquement chargées :**

①  $q_A < 0$  : anions

②  $q_A > 0$  : cations

③  $q_A = 0$  : substances neutres

- (11.78) et (11.82) dans (11.77) :

$$\sum_{A=1}^r q_A \left( \sum_{a=1}^n \omega_a \nu_{aA} - \nabla \cdot \mathbf{j}_A \right) + \nabla \cdot \mathbf{j}_q = 0 \quad (11.83)$$

- **Charge électrique molaire constante :**  $\nabla q_A = 0$  (11.84)

- Ainsi, l'équation (11.83) peut s'écrire comme :

$$\sum_{a=1}^n \omega_a \left( \sum_{A=1}^r q_A \nu_{aA} \right) + \nabla \cdot \left( \mathbf{j}_q - \sum_{A=1}^r q_A \mathbf{j}_A \right) = 0 \quad (11.85)$$

- **Equation dynamique :**

$$\sum_{a=1}^n \omega_a \left( \sum_{A=1}^r q_A \nu_{aA} \right) + \nabla \cdot \left( \mathbf{j}_q - \sum_{A=1}^r q_A \mathbf{j}_A \right) = 0 \quad (11.85)$$

- L'équation (11.85) doit être satisfaite pour tout  $\mathbf{j}_A$  :

$$\mathbf{j}_q = \sum_{A=1}^r q_A \mathbf{j}_A \quad (11.86)$$

- En substituant (11.86) dans (11.85), on obtient la **loi universelle de conservation de la charge électrique** :

$$\sum_{A=1}^r q_A \nu_{aA} = 0 \quad (11.87)$$

qui affirme que la réaction chimique  $a$  entre les substances chimiques  $A$  conserve la charge électrique.

- **Dérivée temporelle de la densité d'énergie interne** :  $u(s, \{n_A\}, q)$

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial s} \dot{s} + \sum_{A=1}^r \frac{\partial u}{\partial n_A} \dot{n}_A + \frac{\partial u}{\partial q} \dot{q} \quad (11.88)$$

- La condition d'équilibre local permet de définir des champs intensifs conjugués aux champs d'états densitaires  $s$ ,  $n_A$  et  $q$  :

- ① **Température** :  $T = \frac{\partial U}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial s}$
- ② **Potentiel chimique** :  $\mu_A = \frac{\partial U}{\partial N_A} = \frac{\partial u}{\partial n_A}$
- ③ **Potentiel électrostatique** :  $\varphi = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{\partial u}{\partial q}$

(11.89)

- (11.89) dans (11.88) :

$$\dot{u} = T \dot{s} + \sum_{A=1}^r \mu_A \dot{n}_A + \varphi \dot{q} \quad (11.90)$$

- **Dérivée temporelle de la densité d'énergie interne :**  $u(s, \{n_A\}, q)$

$$T \dot{s} + \sum_{A=1}^r \mu_A \dot{n}_A + \varphi \dot{q} - \dot{u} = 0 \quad (11.90)$$

- **Equation de continuité de l'énergie interne :**

$$-\dot{u} = (\nabla \cdot \mathbf{v}) u + \nabla \cdot \mathbf{j}_u - \sigma_u \quad (11.54)$$

- **Equation de continuité de l'entropie :**

$$\dot{s} = \sigma_s - (\nabla \cdot \mathbf{v}) s - \nabla \cdot \mathbf{j}_s \quad (11.29)$$

- **Equation de continuité de la substance chimique  $A$  :**

$$\dot{n}_A = \sum_{a=1}^n \omega_a \nu_{aA} - (\nabla \cdot \mathbf{v}) n_A - \nabla \cdot \mathbf{j}_A \quad (11.31)$$

- **Equation de continuité de la charge électrique :**

$$\dot{q} = - (\nabla \cdot \mathbf{v}) q - \nabla \cdot \mathbf{j}_q \quad (11.33)$$

- (11.54), (11.29), (11.31) et (11.33) dans (11.90) :

$$\begin{aligned}
 & T \left( \sigma_s - (\nabla \cdot \mathbf{v}) s - \nabla \cdot \mathbf{j}_s \right) \\
 & + \sum_{A=1}^r \mu_A \left( \sum_{a=1}^n \omega_a \nu_{aA} - (\nabla \cdot \mathbf{v}) n_A - \nabla \cdot \mathbf{j}_A \right) \\
 & + \varphi \left( - (\nabla \cdot \mathbf{v}) q - \nabla \cdot \mathbf{j}_q \right) + (\nabla \cdot \mathbf{v}) u + \nabla \cdot \mathbf{j}_u - \sigma_u = 0
 \end{aligned} \tag{11.91}$$

- **Identités vectorielles : dérivées d'un produit de fonctions**

$$T (\nabla \cdot \mathbf{j}_s) = \nabla \cdot (T \mathbf{j}_s) - \mathbf{j}_s \cdot \nabla T$$

$$\sum_{A=1}^r \mu_A (\nabla \cdot \mathbf{j}_A) = \nabla \cdot \left( \sum_{A=1}^r \mu_A \mathbf{j}_A \right) - \sum_{A=1}^r \mathbf{j}_A \cdot \nabla \mu_A$$

$$\varphi (\nabla \cdot \mathbf{j}_q) = \nabla \cdot (\varphi \mathbf{j}_q) - \mathbf{j}_q \cdot \nabla \varphi$$

- **Equation dynamique** : (11.91) et identités vectorielles

$$\begin{aligned}
 & \left( u - T s - \sum_{A=1}^r \mu_A n_A - q \varphi \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\
 & + \nabla \cdot \left( \mathbf{j}_u - T \mathbf{j}_s - \sum_{A=1}^r \mu_A \mathbf{j}_A - \varphi \mathbf{j}_q \right) + T \pi_s + \sum_{A=1}^r \mu_A \left( \sum_{a=1}^n \omega_a \nu_{aA} \right) \\
 & + \mathbf{j}_s \cdot \nabla T + \sum_{A=1}^r \mathbf{j}_A \cdot \nabla \mu_A + \mathbf{j}_q \cdot \nabla \varphi - \sigma_u = 0
 \end{aligned} \tag{11.92}$$

- **Milieu continu sans cisaillement** : tenseur des contraintes isotrope

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau - p) \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \tau - p & 0 & 0 \\ 0 & \tau - p & 0 \\ 0 & 0 & \tau - p \end{pmatrix} \tag{11.93}$$

où  $\mathbb{1}$  est le tenseur identité représenté par la matrice identité  $3 \times 3$ ,  $\tau$  est le frottement visqueux interne et  $p$  est la pression.

- **Densité de source d'énergie interne** :

$$\sigma_u = \boldsymbol{\tau} : (\nabla \mathbf{v}) = \text{tr} \left( (\tau - p) (\nabla \mathbf{v}) \right) = (\tau - p) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \tag{11.95}$$

- **Densités de charge et de courant électriques :**

$$q = \sum_{A=1}^r q_A n_A \quad \text{et} \quad \mathbf{j}_q = \sum_{A=1}^r q_A \mathbf{j}_A \quad (11.86)$$

- **Densité de puissance chimique :** (11.96)

$$\sum_{A=1}^r \mu_A \left( \sum_{a=1}^n \omega_a \nu_{aA} \right) = - \sum_{a=1}^n \omega_a \left( - \sum_{A=1}^r \mu_A \nu_{aA} \right) = - \sum_{a=1}^n \omega_a \mathcal{A}_a$$

- (11.86), (11.93), (11.95) dans (11.92) :

$$\begin{aligned} & \left( u - T s + p - \sum_{A=1}^r (\mu_A + q_A \varphi) n_A \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ & + \nabla \cdot \left( \mathbf{j}_u - T \mathbf{j}_s - \sum_{A=1}^r (\mu_A + q_A \varphi) \mathbf{j}_A \right) \\ & + T \sigma_s - \sum_{a=1}^n \omega_a \mathcal{A}_a - \tau (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ & + \mathbf{j}_s \cdot \nabla T + \sum_{A=1}^r \mathbf{j}_A \cdot (\nabla \mu_A + q_A \nabla \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (11.97)$$

- 1 **Equation d'équilibre thermostatique** : (11.97) doit être satisfaite pour toute vitesse

$$u = T s - p + \sum_{A=1}^r (\mu_A + q_A \varphi) n_A \quad (11.98)$$

- 2 **Equation d'évolution thermodynamique réversible** : (11.97) doit être satisfaite pour toute densité de courant

$$\mathbf{j}_u = T \mathbf{j}_s + \sum_{A=1}^r (\mu_A + q_A \varphi) \mathbf{j}_A \quad (11.99)$$

- 3 **Equation d'évolution thermodynamique irréversible** : (11.98) et (11.99) dans (11.97)

$$\begin{aligned} \sigma_s = \frac{1}{T} \left\{ \sum_{a=1}^n \omega_a \mathcal{A}_a + \tau (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right. \\ \left. + \mathbf{j}_s \cdot (-\nabla T) + \sum_{A=1}^r \mathbf{j}_A \cdot (-\nabla \mu_A - q_A \nabla \varphi) \right\} \end{aligned} \quad (11.100)$$

### 11.4 Liens entre systèmes local et global

- 11.4.1 Conditions d'homogénéité
- 11.4.2 Bilan de volume
- 11.4.3 Relation d'Euler
- 11.4.4 Bilan d'énergie interne
- 11.4.5 Premier principe de la thermodynamique
- 11.4.6 Deuxième principe de la thermodynamique
- 11.4.7 Dissipation
- 11.4.8 Equation de continuité pour les substances chimiques

- Pour établir les principes de la thermodynamique d'un système global simple, qui est homogène et non-uniforme, on intègre l'équation d'équilibre thermostatique et les équations d'évolutions réversible et irréversible des systèmes locaux ainsi que les équations de continuité sur le volume du système.
- **Homogénéité des champs scalaires** : gradient nul

- ① **Champs intensifs** :

$$\nabla T = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \nabla \mu_A = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \nabla \varphi = \mathbf{0} \quad (11.107)$$

- ② **Densités de source** :

$$\nabla \sigma_u = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \nabla \sigma_s = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \nabla \sigma_A = \mathbf{0} \quad (11.108)$$

- **Homogénéité des divergences des champs vectoriels** : gradient nul

- ① **Divergence de la vitesse** :

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (11.109)$$

- ② **Divergence des densités de courant** :

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{j}_u) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \nabla (\nabla \cdot \mathbf{j}_s) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \nabla (\nabla \cdot \mathbf{j}_A) = \mathbf{0}$$

- **Dérivée temporelle du volume** :  $v = 1$  et  $\dot{v} = 0$

$$\dot{V} = \int_V dV \left( \dot{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) v \right) = \int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (11.102)$$

- **Courant de volume** :

$$I_V = - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_v = - \int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{j}_v) \quad (11.103)$$

- **Densité de courant de volume** : (11.102) et (11.103)

$$\mathbf{j}_v = -\mathbf{v} \quad (11.104)$$

- **Equation de bilan de volume** : (11.102) et (11.103)

$$\dot{V} = I_V \quad (11.105)$$

- **Source de volume** : nulle

$$\Sigma_V = 0 \quad (11.106)$$

- **Equation d'équilibre thermostatique locale :**

$$u(s, \{n_A\}, q) = T s - p + \sum_{A=1}^r (\mu_A + q_A \varphi) n_A \quad (11.110)$$

- **Equation d'équilibre thermostatique globale :** intégrale sur le volume

$$\int_V dV u = T \int_V dV s - p \int_V dV + \sum_{A=1}^r (\mu_A + q_A \varphi) \int_V dV n_A \quad (11.112)$$

- **Energie interne globale :**

$$U(S, V, \{N_A\}, Q) = \int_V dV u(s, \{n_A\}, q)$$

- **Entropie  $S$ , nb. de moles  $N_A$  de substance  $A$ , charge électrique  $Q$  :**

$$S = \int_V dV s \quad N_A = \int_V dV n_A \quad Q = \int_V dV q \quad (11.111)$$

- **Relation d'Euler :** équation d'équilibre thermostatique globale :

$$U(S, V, \{N_A\}, Q) = T S - p V + \sum_{A=1}^r (\mu_A + q_A \varphi) N_A \quad (11.113)$$

- **Equation de continuité de l'énergie interne :**

$$\dot{u} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) u = - \nabla \cdot \mathbf{j}_u + \sigma_u \quad (11.54)$$

- **Equation de continuité de l'énergie interne :** intégration sur le volume

$$\int_V dV \left( \dot{u} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) u \right) = - \int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{j}_u) + \int_V dV \sigma_u \quad (11.117)$$

- **Dérivée temporelle de l'énergie interne :**

$$\dot{U} = \int_V dV \left( \dot{u} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) u \right) \quad (11.114)$$

- **Courant d'énergie interne :**

$$I_U = - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_u = - \int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{j}_u) \quad (11.115)$$

- **Source d'énergie interne :**

$$\Sigma_U = \int_V dV \sigma_u \quad (11.116)$$

- **Equation de bilan d'énergie interne :**

$$\dot{U} = I_U + \Sigma_U \quad (11.118)$$

- **Equation d'évolution réversible :**

$$\mathbf{j}_u = T \mathbf{j}_s + \sum_{A=1}^r (\mu_A + q_A \varphi) \mathbf{j}_A \quad (11.99)$$

- **Densité de courant de chaleur :**

$$\mathbf{j}_Q = T \mathbf{j}_s \quad (11.120)$$

- **Densité de courant énergétique de matière :**

$$\mathbf{j}_C = \sum_{A=1}^r (\mu_A + q_A \varphi) \mathbf{j}_A \quad (11.121)$$

- **Equation d'évolution réversible :**

$$\mathbf{j}_u = \mathbf{j}_Q + \mathbf{j}_C \quad (11.119)$$

- **Courant de chaleur :**

$$I_Q = - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_Q = - \int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{j}_Q) \quad (11.122)$$

- **Courant énergétique de matière :**

$$I_C = - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_C = - \int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{j}_C) \quad (11.123)$$

- **Equation d'évolution réversible** : intégration sur la surface

$$I_U = - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_u = - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_Q - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_C \quad (11.124)$$

- **Courant d'énergie interne** : (11.122) et (11.123) dans (11.124)

$$I_U = I_Q + I_C \quad (11.125)$$

- **Puissance mécanique** : réversible (système simple)

$$P_W = -p \dot{V} = -p \int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (11.126)$$

- **Tenseur des contraintes** : déformation réversible :  $\tau = 0$

$$\tau = -p \mathbb{1} \quad \text{ainsi} \quad \tau : (\nabla \mathbf{v}) = -p (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (11.128)$$

- **Puissance mécanique** : (11.128), (11.56) et (11.116) dans (11.126)

$$P_W = \int_V dV \tau : (\nabla \mathbf{v}) = \int_V dV \sigma_u = \Sigma_U \quad (11.132)$$

- **Premier principe de la thermodynamique** : référentiel du fluide

$$\dot{U} = I_U + \Sigma_U = I_Q + I_C + P_W \quad (11.133)$$

- **Densité de courant d'énergie** : (11.55) où  $\tau = -p \mathbb{1}$

$$\mathbf{j}_e = \mathbf{j}_u - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{j}_u + p \mathbf{v} \quad (11.134)$$

- **Courant d'énergie** : intégration sur la surface

$$I_E = - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_e = - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_u - p \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} \quad (11.135)$$

- **Courant d'énergie interne** :

$$I_U = - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_u \quad (11.124)$$

- **Puissance mécanique** : théorème de la divergence

$$P_W = -p \dot{V} = -p \int_V dV (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}) = -p \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} \quad (11.132)$$

- **Courant d'énergie** : (11.132) et (11.124) dans (11.135)

$$I_E = I_U + P_W = I_Q + I_C + P_W \quad (11.138)$$

- **Equation de continuité de l'énergie :**

$$\dot{e} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) e = - \nabla \cdot \mathbf{j}_e + \sigma_e \quad (11.44)$$

- **Equation de continuité de l'énergie interne :** intégration sur le volume

$$\int_V dV \left( \dot{e} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) e \right) = - \int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{j}_e) + \int_V dV \sigma_e \quad (11.144)$$

- **Dérivée temporelle de l'énergie :**

$$\dot{E} = \int_V dV \left( \dot{e} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) e \right) \quad (11.143)$$

- **Courant d'énergie :**

$$I_E = - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_e = - \int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{j}_e) \quad (11.135)$$

- **Source d'énergie :**

$$\Sigma_E = \int_V dV \sigma_e = \int_V dV \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} = P^{\text{ext}} \quad (11.140)$$

- **Premier principe :** équation de bilan d'énergie

$$\dot{E} = I_E + \Sigma_E = I_Q + I_C + P_W + P^{\text{ext}} \quad (11.146)$$

- **Equation de continuité de l'entropie :**

$$\dot{s} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) s = - \nabla \cdot \mathbf{j}_s + \sigma_s \quad (11.54)$$

- **Equation de continuité de l'entropie :** intégration sur le volume

$$\int_V dV \left( \dot{s} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) s \right) = - \int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{j}_s) + \int_V dV \sigma_s \quad (11.151)$$

- **Courant d'entropie :**

$$I_S = - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_s = - \int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{j}_s) \quad (11.148)$$

- **Source d'entropie :** condition d'évolution

$$\Sigma_S = \int_V dV \sigma_s \geq 0 \quad (11.150)$$

- **Courant de chaleur :**

$$I_Q = - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_Q = - T \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_s = T I_S \quad (11.149)$$

- **Deuxième principe de la thermodynamique :**

$$\dot{S} = I_S + \Sigma_S = \frac{I_Q}{T} + \Sigma_S \quad (11.152)$$

- **Equation d'évolution irréversible :** (11.100) système homogène

$$\sigma_s = \frac{1}{T} \left( \sum_{a=1}^n \mathcal{A}_a \omega_a \right) \quad (11.153)$$

- **Source d'entropie :** intégration sur le volume

$$\Sigma_S = \int_V dV \sigma_s = \frac{1}{T} \left( \sum_{a=1}^n \mathcal{A}_a \int_V dV \omega_a \right) \geq 0 \quad (11.54)$$

- **Vitesse de réaction chimique :**

$$\Omega_a = \int_V dV \omega_a \quad (11.155)$$

- **Source d'entropie :** (11.155) dans (11.54)

$$\Sigma_S = \frac{1}{T} \left( \sum_{a=1}^n \mathcal{A}_a \Omega_a \right) \geq 0 \quad (11.156)$$

- **Equation de continuité de la substance chimique  $A$  :**

$$\dot{n}_A + (\nabla \cdot \mathbf{v}) n_A = - \nabla \cdot \mathbf{j}_A + \sum_{a=1}^n \omega_a \nu_{aA} \quad (11.31)$$

- **Equation de continuité pour les substances chimiques :** (11.157)

$$\sum_{A=1}^r \mu_A \left( \dot{n}_A + (\nabla \cdot \mathbf{v}) n_A \right) = - \nabla \cdot \left( \sum_{A=1}^r \mu_A \mathbf{j}_A \right) + \sum_{a=1}^n \omega_a \sum_{A=1}^r \mu_A \nu_{aA}$$

- **Densité de courant chimique pour des substances neutres :**

$$\mathbf{j}_C = \sum_{A=1}^r \mu_A \mathbf{j}_A \quad (11.158)$$

- **Affinité d'une réaction chimique  $a$  :**

$$\mathcal{A}_a = - \sum_{A=1}^r \mu_A \nu_{aA} \quad (8.22)$$

- **Equation de continuité pour les substances chimiques :**

$$\sum_{A=1}^r \mu_A \left( \dot{n}_A + (\nabla \cdot \mathbf{v}) n_A \right) = - \nabla \cdot \mathbf{j}_C - \sum_{a=1}^n \mathcal{A}_a \omega_a \quad (11.159)$$

- **Equation de continuité pour les substances chimiques :**

$$\sum_{A=1}^r \mu_A \left( \dot{n}_A + (\nabla \cdot \mathbf{v}) n_A \right) = - \nabla \cdot \mathbf{j}_C - \sum_{a=1}^n \mathcal{A}_a \omega_a \quad (11.159)$$

- **Equation de continuité : intégration sur le volume : (11.160)**

$$\sum_{A=1}^r \mu_A \int_V dV \left( \dot{n}_A + (\nabla \cdot \mathbf{v}) n_A \right) = - \int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{j}_C) - \sum_{a=1}^n \mathcal{A}_a \int_V dV \omega_a$$

- **Dérivée temporelle de la substance chimique  $A$  :**

$$\sum_{A=1}^r \mu_A \dot{N}_A = \sum_{A=1}^r \mu_A \int_V dV \left( \dot{n}_A + (\nabla \cdot \mathbf{v}) n_A \right) \quad (11.161)$$

- **Courant énergétique de matière :**

$$I_C = - \int_V dV (\nabla \cdot \mathbf{j}_C) \quad (11.123)$$

- **Vitesse de réaction :**

$$\Omega_a = \int_V dV \omega_a \quad (11.155)$$

- Equation de bilan pour les substances chimiques :

$$\sum_{A=1}^r \mu_A \dot{N}_A = I_C - \sum_{a=1}^n \mathcal{A}_a \Omega_a \quad (11.162)$$

- Courant de substance  $A$  :

$$I_A = - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_A \quad (11.163)$$

- Densité de courant chimique pour des substances neutres :

$$\mathbf{j}_C = \sum_{A=1}^r \mu_A \mathbf{j}_A \quad (11.158)$$

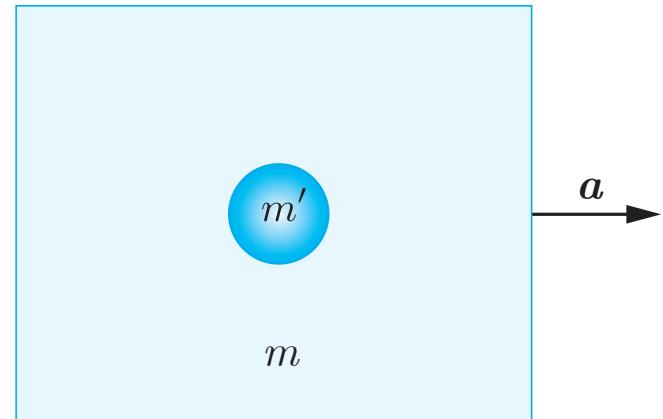
- Courant énergétique de matière :

$$I_C = - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_C = - \sum_{A=1}^r \mu_A \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}_A = \sum_{A=1}^r \mu_A I_A \quad (11.164)$$

## 11.5 Applications

- 11.5.1 Accéléromètre à force d'Archimède
- 11.5.2 Invariance galiléenne
- 11.5.3 Tenseur des contraintes symétrique

- **Système** : un flotteur de densité de masse  $m'$  est immergé dans un récipient complètement rempli de liquide de densité de masse  $m$  où  $m > m'$ . Le récipient se déplace par rapport au sol avec une accélération constante  $a$ . Le liquide est au repos par rapport au récipient.



- **Densité de force extérieure** : densité de poids dans le liquide

$$\sum f^{\text{ext}} = m g \quad (11.168)$$

- **Tenseur des contraintes** : absence de frottement interne :  $\tau = 0$

$$\tau = -p \mathbb{1} \quad \text{ainsi} \quad \nabla \cdot \tau = -\nabla p \quad (11.128)$$

- **Théorème du centre de masse** : (11.128) dans (11.42)

$$\sum f^{\text{ext}} - \nabla p = ma \quad (11.167)$$

- **Gradient de pression** : (11.168) dans (11.167)

$$\nabla p = m(g - a) \quad (11.169)$$

- **Force d'Archimède** : résultante des forces de pression exercée par le liquide sur la surface  $S$  du flotteur.

$$\mathbf{F}_A = \int_S p (-d\mathbf{S}) \quad (11.170)$$

où  $d\mathbf{S}$  est orienté du flotteur vers le liquide.

- **Théorème du gradient** : champ scalaire pression  $p$

$$\mathbf{F}_A = - \int_S p d\mathbf{S} = - \int_V \nabla p dV \quad (11.171)$$

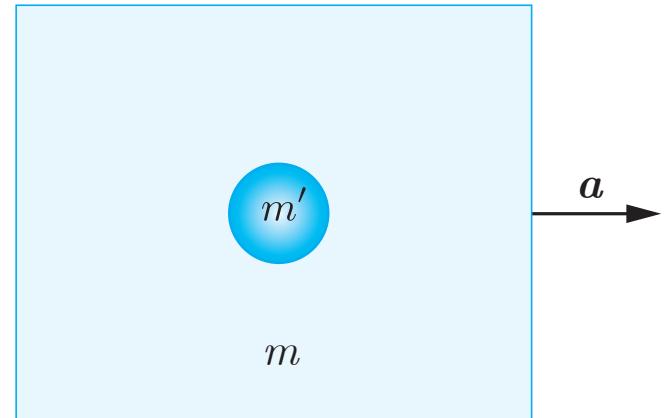
où  $V$  est le volume du flotteur.

- **Gradient de pression** :

$$\nabla p = m (\mathbf{g} - \mathbf{a}) \quad (11.169)$$

- **Force d'Archimède** : (11.169) dans (11.171) masse homogène  $m$

$$\mathbf{F}_A = -m (\mathbf{g} - \mathbf{a}) \int_V dV \quad (11.172)$$



- **Force d'Archimète** : (11.172) remise en forme

$$\mathbf{F}_A = -m V (\mathbf{g} - \mathbf{a}) \quad (11.173)$$

Dans un fluide accéléré, i.e.  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , la force d'Archimète n'est pas verticale : elle est oblique et orientée le long du fil.

- **Principe d'Archimète** : cas particulier :  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{F}_A = -m V \mathbf{g} \quad (\text{principe d'Archimète}) \quad (11.174)$$

Dans un fluide au repos, i.e.  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ , la force d'Archimète est verticale et orientée vers le haut, et sa norme est égale au poids du fluide déplacé.

- **Accéléromètre** : on construit un accéléromètre en attachant un flotteur de densité de masse  $m'$  à un fil qui est retenu au fond d'un récipient complètement rempli de liquide de densité de masse  $m$ . Le récipient se déplace par rapport au sol avec une accélération constante  $\mathbf{a}$ . Le liquide et le flotteur sont au repos par rapport au récipient.

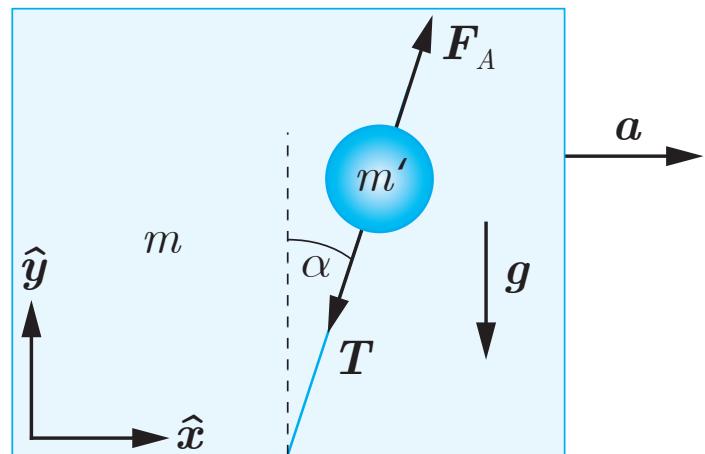
- **Objet** : flotteur homogène de masse  $M'$

- **Forces extérieures** :

- ① **Poids** :  $M'g$

- ② **Tension** :  $T$

- ③ **Force d'Archimède** :  $F_A$



- **Théorème du centre de masse** : flotteur

$$M'g + F_A + T = M'a \quad (11.175)$$

- **Masse** : flotteur homogène de densité  $m'$

$$M' = m'V \quad (11.176)$$

- **Force d'Archimède** :

$$F_A = -mV(g - a) \quad (11.173)$$

- **Tension** : dans le fil (11.175) où  $m' < m$

$$T = -M'(g - a) - F_A = (m - m')V(g - a) \quad (11.177)$$

- **Tension** : dans le fil

$$T = (m - m') V (g - a) \quad (11.177)$$

- **Grandeurs vectorielles** : (11.179)

- ① **Tension** :  $T = T_x \hat{x} + T_y \hat{y}$

- ② **Accélération** :  $a = a \hat{x}$

- ③ **Champ gravitationnel** :  $g = -g \hat{y}$

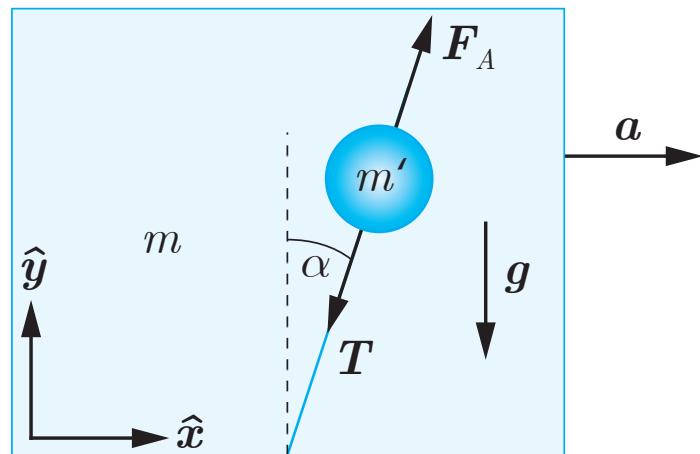
- **Tension** : composantes

$$\begin{aligned} T_x &= - (m - m') V a \\ T_y &= - (m - m') V g \end{aligned} \quad (11.180)$$

- **Angle d'inclinaison du fil** :

$$\tan \alpha = \frac{T_x}{T_y} = \frac{a}{g} \quad \text{ainsi} \quad \alpha = \arctan \left( \frac{a}{g} \right) \quad (11.181)$$

Le flotteur s'incline vers la droite si  $a > 0$  et vers la gauche si  $a < 0$ .





- ① Un ballon rempli d'hélium, fixé au bout d'un fil, est attaché au sol d'un chariot. En accélérant le chariot vers la droite, il subit une force d'Archimède orientée obliquement vers la droite le long du fil. En freinant le chariot, il s'incline vers la gauche, car son accélération devient négative. En faisant tourner uniformément le chariot autour d'un axe fixe, la force d'Archimède est orientée obliquement vers l'intérieur du virage en raison de l'accélération centripète. L'angle d'inclinaison du fil permet de déterminer l'accélération du chariot.
- ② Une balle en plastique est attachée par un fil au fond d'un récipient rempli d'eau. Lorsqu'on accélère le récipient, elle subit une force d'Archimède orientée le long du fil dans le sens du déplacement.

- **Système** : fluide homogène et uniforme
  - ① **Référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$**  : vitesse du fluide  $\mathbf{v}_0 = \text{cste}$
  - ② **Référentiel du fluide  $\mathcal{R}'$**  : fluide au repos
- **Transformation de Galilée** :  $\mathcal{R}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathcal{R}'(\mathbf{x}', t')$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{v}_0 t \\ t' &= t \end{aligned} \tag{11.182}$$

- **Fonction d'état** : grandeur scalaire extensive
  - ① **Référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$**  :  $F(t)$
  - ② **Référentiel du fluide  $\mathcal{R}'$**  :  $F(t')$
- **Densité de fonction d'état** : grandeur scalaire densitaire
  - ① **Référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$**  :  $f(\mathbf{x}, t)$
  - ② **Référentiel du fluide  $\mathcal{R}'$**  :  $f(\mathbf{x}', t')$

- **Dérivée temporelle de la fonction d'état** : référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$

$$\dot{F}(t) = \int_{V(t)} dV(\mathbf{x}) \left( \partial_t f(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) f(\mathbf{x}, t) \right) \quad (11.183)$$

- **Dérivée temporelle de la fonction d'état** : référentiel du fluide  $\mathcal{R}'$

$$\dot{F}(t') = \int_{V(t')} dV(\mathbf{x}') \partial_{t'} f(\mathbf{x}', t') \quad (11.184)$$

- **Invariance galiléenne** : la coordonnée temporelle est invariante par transformation de Galilée. Ainsi, la dérivée temporelle de la fonction d'état est indépendante du référentiel,

$$\dot{F}(t) = \dot{F}(t') \quad (11.185)$$

- **Loi de transformation** : (11.183) - (11.185) identification des intégrants

$$\partial_{t'} f(\mathbf{x}', t') = \partial_t f(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) f(\mathbf{x}, t) \quad (11.186)$$

- **Référentiel  $\mathcal{R}'$**  : en translation à vitesse  $\mathbf{v}_0$  par rap. au référentiel  $\mathcal{R}$

$$\partial_{t'} f(\mathbf{x}', t') = \partial_t f(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) f(\mathbf{x}, t) \quad (11.186)$$

- **Référentiel  $\mathcal{R}$**  : en translation à vitesse  $-\mathbf{v}_0$  par rap. au référentiel  $\mathcal{R}'$

$$\partial_t f(\mathbf{x}, t) = \partial_{t'} f(\mathbf{x}', t') - (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla') f(\mathbf{x}', t') \quad (11.187)$$

- **Invariance galiléenne du gradient** : (11.186) + (11.187)

$$\nabla' f(\mathbf{x}', t') = \nabla f(\mathbf{x}, t) \quad (11.188)$$

- **Dérivée temporelle** : transformation de Galilée (11.182)

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v} - \mathbf{v}' \quad (11.189)$$

- **Loi de transformation** : (11.189) dans (11.186)

$$\partial_{t'} f(\mathbf{x}', t') = \partial_t f(\mathbf{x}, t) + ((\mathbf{v} - \mathbf{v}') \cdot \nabla) f(\mathbf{x}, t)$$

- **Loi de transformation** : remise en forme

$$\partial_{t'} f(\mathbf{x}', t') + (\mathbf{v}' \cdot \nabla') f(\mathbf{x}', t') = \partial_t f(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f(\mathbf{x}, t) \quad (11.190)$$

- **Loi de transformation :**

$$\partial_{t'} f(\mathbf{x}', t') + (\mathbf{v}' \cdot \nabla') f(\mathbf{x}', t') = \partial_t f(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f(\mathbf{x}, t) \quad (11.190)$$

- **Dérivée temporelle covariante** : référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$  (11.21)

$$\dot{f}(\mathbf{x}, t) = \partial_t f(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) f(\mathbf{x}, t)$$

- **Dérivée temporelle covariante** : référentiel du fluide  $\mathcal{R}'$  (11.21)

$$\dot{f}(\mathbf{x}', t') = \partial_{t'} f(\mathbf{x}', t') + (\mathbf{v}'(\mathbf{x}', t') \cdot \nabla') f(\mathbf{x}', t')$$

- **Invariance galiléenne de la dérivée temporelle covariante** : (11.190)

$$\dot{f}(\mathbf{x}', t') = \dot{f}(\mathbf{x}, t) \quad (11.191)$$

- **Invariance galiléenne** : les lois non-relativistes de la mécanique classique, de la mécanique des fluides, de la thermodynamique et de la mécanique quantique sont invariantes par transformation de Galilée.

- **Densité de moment cinétique :**

$$\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (11.192)$$

- **Equation de continuité :** moment cinétique

$$\dot{\ell} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \ell + \nabla \cdot \mathbf{j}_\ell = \sigma_\ell \quad (11.193)$$

- **Dérivée temporelle :** moment cinétique

$$\dot{\ell} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \quad (11.194)$$

- **Equation de continuité :** quantité de mouvement

$$\dot{\mathbf{p}} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{p} - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (11.37)$$

- **Equation de continuité :** moment cinétique (11.37) dans (11.194)

$$\dot{\ell} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \ell - \mathbf{r} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (11.195)$$

- **Equation de continuité** : moment cinétique

$$\dot{\ell} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \ell + \nabla \cdot \mathbf{j}_\ell = \boldsymbol{\sigma}_\ell \quad (11.193)$$

$$\dot{\ell} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \ell - \mathbf{r} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (11.195)$$

- **Densité de source** : moment cinétique

$$\boldsymbol{\sigma}_\ell = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{f}^{\text{ext}} = \mathbf{r} \times \sum \mathbf{f}^{\text{ext}} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_p \quad (11.198)$$

- **Densité de courant** : moment cinétique

$$\mathbf{j}_\ell = \mathbf{r} \times \mathbf{j}_p = -\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau} \quad (11.199)$$

- **Divergence de la densité de courant** : (11.193) et (11.195)

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_\ell = -\mathbf{r} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (11.200)$$

- **Divergence de la densité de courant** :

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_\ell = -\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}) \quad (11.197)$$

- Divergence de la densité de courant : (11.200) et (11.197)

$$\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{r} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (11.201)$$

- ➊ Premier terme : convention de sommation d'Einstein avec  $\partial_\ell r^j = \delta_\ell^j$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}) &= \left( \partial_k \left( \varepsilon_{1i}^j r^i \tau_j^k \right), \partial_k \left( \varepsilon_{2i}^j r^i \tau_j^k \right), \partial_k \left( \varepsilon_{3i}^j r^i \tau_j^k \right) \right) \\ &= \left( \varepsilon_{1i}^j \tau_j^i, \varepsilon_{2i}^j \tau_j^i, \varepsilon_{3i}^j \tau_j^i \right) \\ &\quad + \left( \varepsilon_{1i}^j r^i \partial_k \tau_j^k, \varepsilon_{2i}^j r^i \partial_k \tau_j^k, \varepsilon_{3i}^j r^i \partial_k \tau_j^k \right) \end{aligned} \quad (11.202)$$

- ➋ Deuxième terme : convention de sommation d'Einstein

$$\mathbf{r} \times (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) = \left( \varepsilon_{1i}^j r^i \partial_k \tau_j^k, \varepsilon_{2i}^j r^i \partial_k \tau_j^k, \varepsilon_{3i}^j r^i \partial_k \tau_j^k \right) \quad (11.203)$$

- Identité en composantes : (11.201) convention de sommation

$$\left( \varepsilon_{1i}^j \tau_j^i, \varepsilon_{2i}^j \tau_j^i, \varepsilon_{3i}^j \tau_j^i \right) = (0, 0, 0) \quad (11.204)$$

- **Identité en composantes** : convention de sommation d'Einstein

$$\left( \varepsilon_{1i}{}^j \tau_j^i, \varepsilon_{2i}{}^j \tau_j^i, \varepsilon_{3i}{}^j \tau_j^i \right) = (0, 0, 0) \quad (11.204)$$

- **Composantes du tenseur antisymétrique de Levi-Civita :**

$$\varepsilon_{12}{}^3 = \varepsilon_{23}{}^1 = \varepsilon_{31}{}^2 = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{13}{}^2 = \varepsilon_{21}{}^3 = \varepsilon_{32}{}^1 = -1 \quad (11.205)$$

- **Identité en composantes** : (11.205) dans (11.204)

$$(\tau_3^2 - \tau_2^3, \tau_1^3 - \tau_3^1, \tau_2^1 - \tau_1^2) = (0, 0, 0) \quad (11.206)$$

- **Tenseur des contraintes symétrique :**

$$\tau_2^1 = \tau_1^2 \quad \text{et} \quad \tau_3^2 = \tau_2^3 \quad \text{et} \quad \tau_1^3 = \tau_3^1 \quad (11.207)$$